

G Class 対策

Revised on 8/03/99

基本的な数学の知識

円(circle)

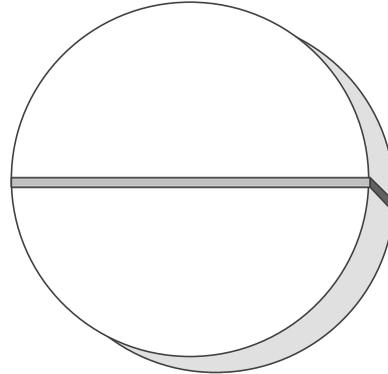
r: radius

d: diameter(直径=2r)

円周(perimeter; circumference): $2\pi r$

面積(area): πr^2

同心円: concentric (circles)



円柱(pillar; cylinder)

体積(volume): $\pi r^2 \times h$

球(ball; sphere)

体積(volume): $\frac{4}{3} \pi r^3$

円錐(cone)

体積(volume): $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

角形(angled shape)

三角形(triangle)

Pythagorean Theorem(三平方の定理): $a^2 + b^2 = c^2$

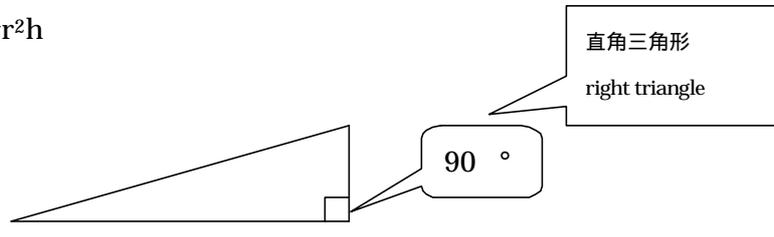
四角形: 平行四边形(parallelogram) 面積: $a \times h$

長方形(rectangular) $a \times b$

正方形(square) a^2

台形(trapezoid) $\frac{1}{2}(a+b)h$

対角線(diagonal)



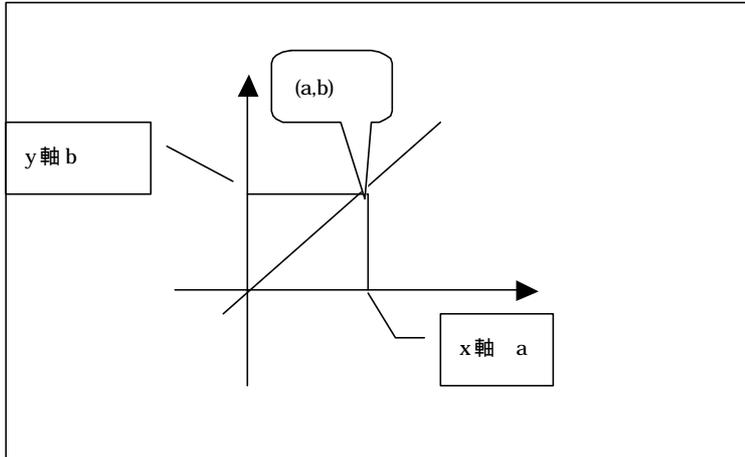
$\sin 30^\circ : 1/2 = \cos 60^\circ$

$\sin 45^\circ : 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ$

$\sin 60^\circ : \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ$

座標(coordinate)

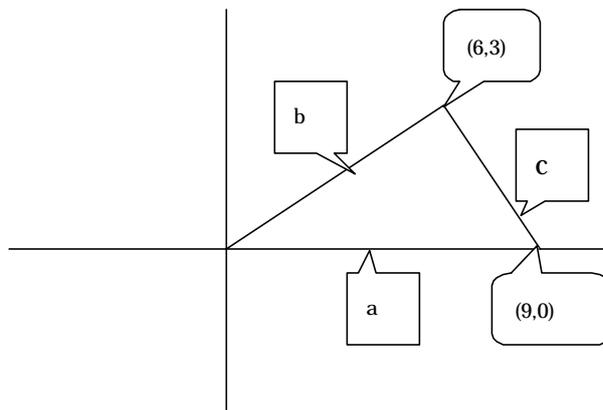
SAT/GRE/GMAT では通常、平面(plane)な座標を取り扱う。



上記の図は簡単な直線の x、y 軸上の関数を示している。coordinate は(x,y)で表される。
 $y = ax$ の式である。この場合は原点を通るが、 $y = ax + b$ の式では原点から外れる。
 また a は傾きを示すから $a > 0$ ならば右上がり(上と同じ)になるが、 $a < 0$ ならば右下がりとなる。

面積(area)・周囲(perimeter)の求め方

一般的に難しいものは出題されないが、三平方の定理ぐらいいは使えるようにするよう。



面積(area)

h は原点を通っているから 3 である。a は 9 である。だから、
 $\frac{1}{2} a \times h = \frac{1}{2} \times 9 \times 3$ となる。原点を通っていなくても同様に考える。

周囲(perimeter) 三平方の定理を用いて、right triangle を周囲に作り上げる。

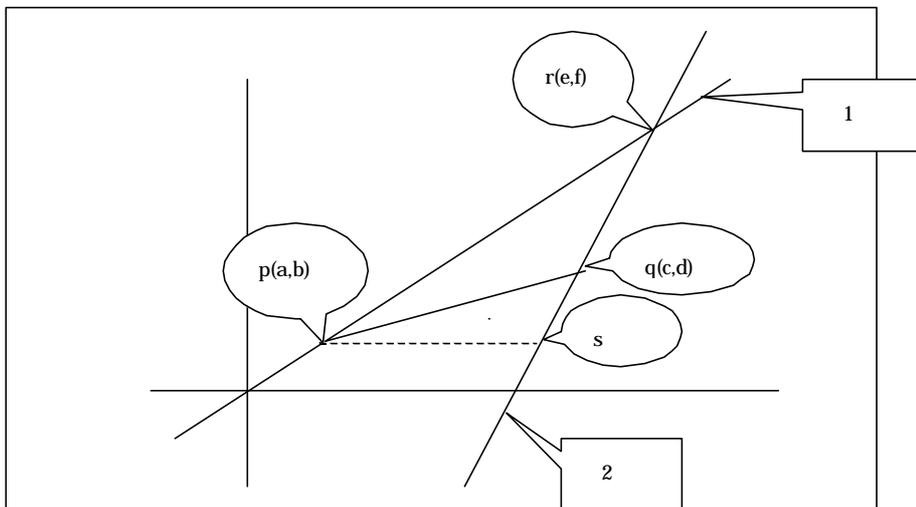
$$a = 9$$

$$b^2 = 6^2 + 3^2; b = |36 + 9| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$c^2 = 3^2 + (9 - 6)^2; c = |9 + 9| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ となる。}$$

少し難しい面積(area)の求め方

問題では、p, q, r の座標のみが与えられている。



(1)最初に 2 の式を求める。

2 の傾きは: $(f-d)/(e-c)$ で求められる。よって、2 の式は $y_2 = (f-d)/(e-c) x + m$ となり、m は $y = 0$ を代入すれば求められる。

(2)次に s の coordinate を求める。

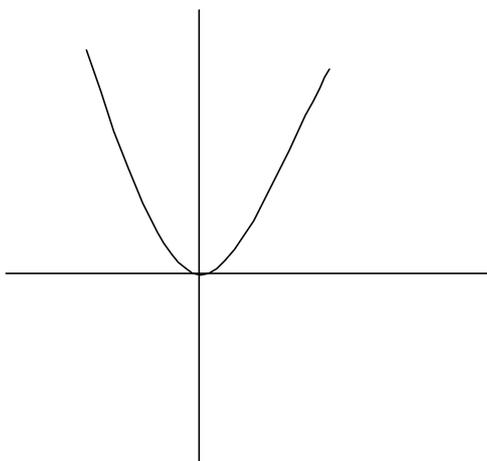
$y = b$ を代入すれば、x は求められる。

(3) $\triangle PRS$ の面積を求める。h は $(f - b)$ である。

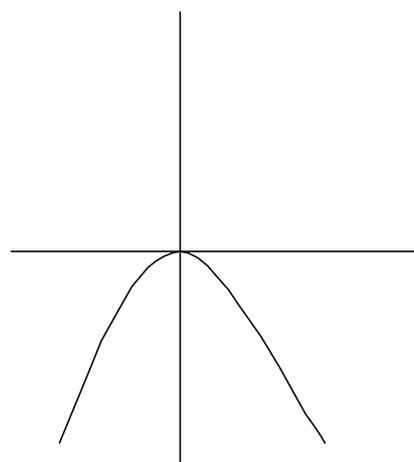
(4)最後に $\triangle PQS$ の面積を引けばよい。

参考まで(出題されないと思う)

$y = ax^2$ の関数は: $a > 0$ の時



$a < 0$ の時



となることぐらいは覚えておこう。

かんべ英語塾(Kambe, Takashi) 著作権:神部孝 コピーおよび無断流用を禁ずる!!
2-20-1 Kaminoge, Setagaya-ku, Tokyo 158
Tel 03-5707-7589 E-mail: t-kambe@dh.catv.ne.jp
Fax 03-5707-7588 URL: http://home.catv.ne.jp/dd/t_kambe/

平方根(root, square root)の考え方

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ であり、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ となる。

$\sqrt{60}$ を考えてみよう。なるべく多くの因数に分解してもよいが、出来れば 4 や 9 に分解したほうが良い。

$\sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15}$ だから $\sqrt{4} \times \sqrt{15}$ となる。よって $2\sqrt{15}$ ($2\sqrt{3}\sqrt{5}$) となる。

覚えていてほしい事

$\sqrt{2}$ 1.414... (一夜一夜にひとみ頃)

$\sqrt{3}$ 1.732... (人並みにおごれよ)

$\sqrt{5}$ 2.236... (富士山ろくにオオム鳴く)

このぐらいの計算は出される。

$\sqrt{6}$ の求め方

$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ だから: 1.414×1.732 で近似値(approximate value)が求められる。

(なお、 π は 3.14...である)

乗 (power) cf. multiplier(掛け算の乗数)

2^n は 2^3 と 2^2 を基本に覚えていてほしい。

$2^3 = 8$ であるし、 $2^2 = 4$ である。

$2^8 = 2^3 \times 2^3 \times 2^2$ に分解できる。つまり 2^n は $n = a + b + c \dots$ に分解できるということである。

$(2^n)^m = 2^{nm}$ となる。 $(2^4)^2$ は 2^8 である。

10^3 は 1,000 であり、 10^6 は 1,000,000 である。

Root(平方根)#2

(1) How to solve roots by hand.

Example 1

Solve 625

Think in "Hundredth"

	2 (?)
2	6 25
2	<u>4 (2 x 2)</u>
4(?)	2 25

Think which number can make 4(?) x (?) equal to "225."

Answer: (?) = 5 i.e., 45 x 5 = 225 so that 25 is the answer.

Exercises:

Solve 256; 1050625

(2) How to think of "Special Rule."

Example

If the mark & is defined by $&x = x^2 - 5$, then what is the value of $&6 \times &5$?

Step 1

Think what is the rule and what donates "&."

Step 2

Replace "x" with "6" and "5."

$$&6 \times &5 = (6^2 - 5) \times (5^2 - 5) = (36 - 5) \times (25 - 5) = 31 \times 20 = 620$$

Exercises:

You are assigned the operation "*" where $*x$ equals $x^3 - x^2$; then what is the value if x equals "-5"?

鶴亀算

鶴と亀の足の本数の違いで計算する。

例: ミカンとリンゴがそれぞれ 30 円と 50 円である。840 円で合計 20 個を買った。ミカンとリンゴの数を求めなさい。

[解] 連立方程式を使わないで解けるようにして下さい。

(1)ミカンだけを 20 個買ったらどうなる?

$$30 \text{ 円} \times 20 = 600$$

(2)差額は?

$$840 - 600 = 240$$

(3)差額を[単価の差額]で割る。

$$240 \div (50 - 30) = 12 \text{ これがリンゴの数である。}$$

[検算]

$$(50 \text{ 円} \times 12) + (30 \text{ 円} \times 8) = 840 \text{ 円} \quad \text{O.K!}$$

逆からも計算できる。

リンゴだけを 20 個買ったら、1000 円となる。

$$\text{差額}(1000 - 840) \div (50 - 30) = 8 \text{ 個これがミカンの数である。}$$

植木算

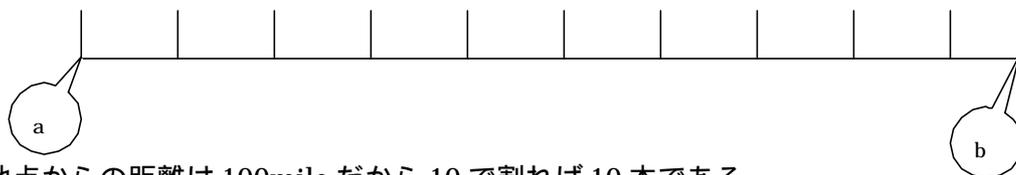
植木を植える時に端から端まで等間隔に木を植えた時どうなるかという計算である。英語では inclusive という単語でこのことを表している。

次の例を見てみよう。

a 地点から b 地点まで 100mile あるとする。ここに 10mile ごとに旗を立てると何本必要か? なお、出発点である a 地点にも旗を立てるものとする。

[解]

$$100\text{mile} \div 10\text{mile} + 1 = 11 \text{ 本である。}$$



a 地点からの距離は 100mile だから 10 で割れば 10 本である。

しかし、a 地点にも植えなければならないから 1 本足されるわけである。簡単な計算だから考え方さえしっかりしていれば良い。“ inclusive ” という単語に注意しよう。

連立方程式の解き方

その(1)

$$x + 2y = 3$$

$$3x - 4y = 5$$

Step (1) xまたはyを簡略化する。

$$x = -2y + 3$$

Step (2) に代入する。

$$3(-2y + 3) - 4y = 5$$

$$-6y + 9 - 4y = 5$$

$$-10y = -4$$

$$y = 0.4$$

Step (3) xを求める。

$$x = -2 \times 0.4 + 3 = 2.2$$

その(2)

$$x + 2y = 3$$

$$3x - 4y^2 = 5$$

Step (1) xまたはyを簡略化する。

Step (2) $3(-2y + 3) - 4y^2 = 5$

$$-6y + 9 - 4y^2 = 5 \quad -4y^2 - 6y + 4 = 0$$

両辺に(-1)を掛ける

$$4y^2 + 6y - 4 = 0$$

両辺を2で割る

$$2y^2 + 3y - 2 = 0 \quad ay^2 + by + c = 0$$

$$Y = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] \div 2a = [-3 \pm \sqrt{(9 - (-16))}] \div 4 = -2, 0.5$$

かんべ英語塾(Kambe, Takashi) 著作権:神部孝 コピーおよび無断流用を禁ずる!!

2-20-1 Kaminoge, Setagaya-ku, Tokyo 158

Tel 03-5707-7589

E-mail: t-kambe@dh.catv.ne.jp

Fax 03-5707-7588

URL: http://home.catv.ne.jp/dd/t_kambe/

基本的な 2 次方程式の解法

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

一般に SAT/GRE/GMAT では簡単な解法しか出題されない。

[例]

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

c は掛け算、b は足し算で求められるから:

$$[6 = 2 \times 3 \quad 5]$$

$$[6 = 1 \times 6 \quad 7] \text{のいずれかしかとれない。}$$

よって

$$(x + 2)(x + 3) = 0 \text{ であり}$$

$$x = -2, -3 \text{ となる。}$$

[例]

$x^2 + 3x - 4 = 0$ の時は:

$$-4 = -2 \times 2 \quad 0$$

$$-4 = -4 \times 1 \quad -3$$

$$-4 = 4 \times -1 \quad 3$$

よって

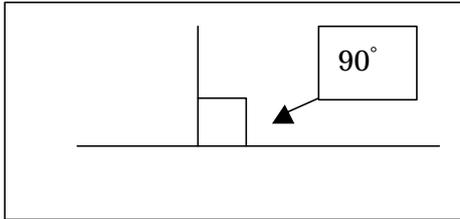
$$(x + 4)(x - 1) = 0 \text{ となり}$$

$$x = -4, 1 \text{ となる。}$$

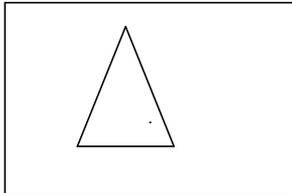
用語解説

用語解説

Perpendicular(垂線)

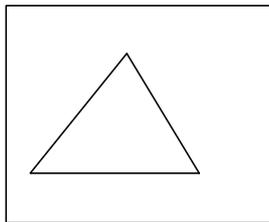


Equiangular triangle(二等辺三角形)



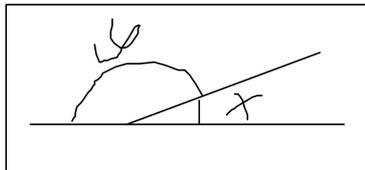
底辺の角は同一である。

Equilateral triangle(正三角形)



すべての角は 60° である。

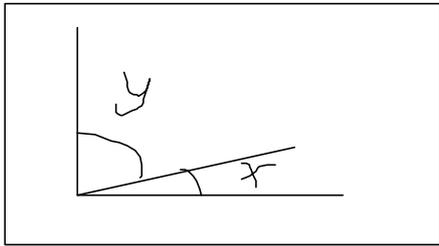
Supplement



If $x=60^\circ$, then what are degrees of the supplement of x?

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Complement

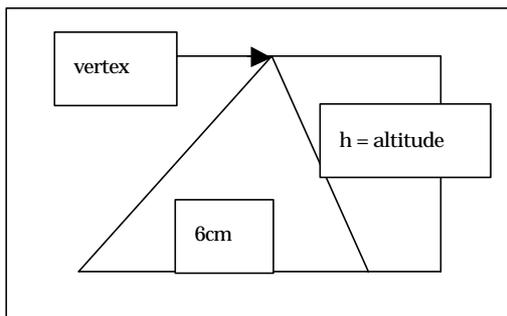


$$x + y = 90^\circ$$

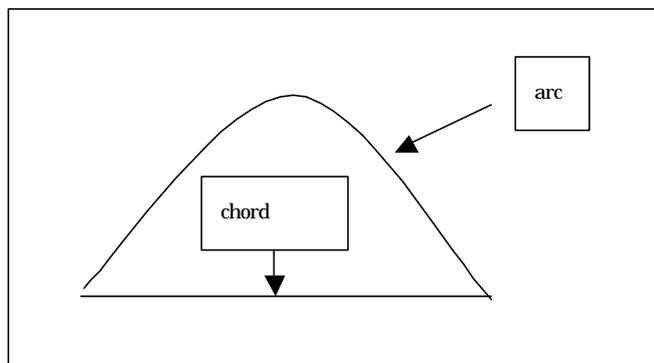
Vertex(頂点)

A vertex of the triangle has an altitude of 5 cm and its base is 6 cm long. Then calculate the area of the triangle:

$$1/2 ah = 1/2 \times 5 \times 6$$



Arc & Chord



かんべ英語塾(Kambe, Takashi) 著作権:神部孝 コピーおよび無断流用を禁ずる!!
2-20-1 Kaminoge, Setagaya-ku, Tokyo 158
Tel 03-5707-7589 E-mail: t-kambe@dh.catv.ne.jp
Fax 03-5707-7588 URL: http://home.catv.ne.jp/dd/t_kambe/

用語解説#2Arithmetic

Negative & Non-negative

通常 Negative < 0 ; Non-negative > 0

Absolute value

what is the absolute value of [-5]? 5

$$|-x| \geq 0$$

Even & Odd number

“even number” is divisible by 2.

“odd number” is **not** divisible by 2.

Greater(more) than & Less than

If the number x is greater than 10, it means:

$$x \geq 11$$

If the number x is less than 10, it denotes:

$$x \leq 9$$

If the number x is more or equals to 10, x is:

$$x \geq 10$$

Round(通常は、四捨五入)

What is an approximate number of π in the first digit of real number?

$$3.1415 \approx 3$$

What is the nearest rounded number of 1153 in hundredth?

1153 \approx 1200 100 の桁でまとめる 10 の桁を四捨五入すればよい。

かんべ英語塾(Kambe, Takashi) 著作権:神部孝 コピーおよび無断流用を禁ずる!!

2-20-1 Kaminoge, Setagaya-ku, Tokyo 158

Tel 03-5707-7589

E-mail: t-kambe@dh.catv.ne.jp

Fax 03-5707-7588

URL: http://home.catv.ne.jp/dd/t_kambe/

階乗(a factorial)

Factorial or “r” = r!

Example: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

二乗(a square)

Example: $2^2 = 4$

Combination-problem of a factorial and a square:

What is the least possible factorial which contains squares of 2, 3, 4, 5, and 6?

Solution:

(1) Find the factors of each number

(2) $2 \times 2 = 4$; $2 \times 3 = 6$

(3) Since the largest prime number is “5”, so that it is important to find the 5^2

(4) $10!$ contains two 5s, i.e., $5 \times 2 = 10$; then the answer is $10!$

かんべ英語塾(Kambe, Takashi) 著作権:神部孝 コピーおよび無断流用を禁ずる!!
2-20-1 Kaminoge, Setagaya-ku, Tokyo 158
Tel 03-5707-7589 E-mail: t-kambe@dh.catv.ne.jp
Fax 03-5707-7588 URL: http://home.catv.ne.jp/dd/t_kambe/

指数関数(exponential function)

$$5^{1/2} = \sqrt{5}$$

$$5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$

多分出題されないと思うが:

$$5^{1/2} \times 5^{1/3} = 5^{(1/2 + 1/3)} = 5^{5/6} \text{ となる。}$$

また

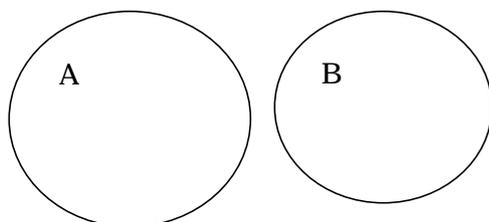
$$(a^n)^m = a^{nm} \text{ だから}$$

$$(5^{1/2})^{1/3} = 5^{1/6} \text{ となる。}$$

$$5^{-2} = 1/5^2 \text{ となる。}$$

Venn Diagram(ベン図) – 集合(Set)の考え方

ベン図の考え方は広範囲に応用できる。

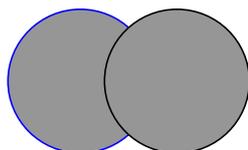


A と B のグループがあったときその重なり具合から、数値を推定することが出来る。

例えば:

$$A \cup B$$

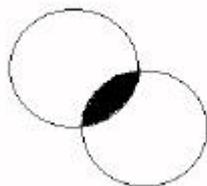
である場合には、



この塗りつぶされた全体を意味する。

$$A \cap B$$

である場合には、



この重なり部分を考える。

Venn Diagram を描けるようになるとかなりの問題が解けるようになるはずである。